Babeş-Bolyai University of Cluj-Napoca

Faculty of Mathematics and Computer Science

Habilitation Thesis

in

Mathematics

presented by

Teodor Bulboacă

New Results in the Theory of Differential Subordinations and Superordinations

Cluj-Napoca

2015

Rezumat

În teoria funcţiilor de o variabilă reală există multe rezultate referitoare la inegalităţi diferenţiale (adică inegalităţi care conţin funcţia şi derivatele sale), iar acest domeniu al inegalităţilor diferenţiale s-a dezvoltat abia în ultimii şasezeci de ani. Pentru cei interesaţi în a studia inegalităţile diferenţiale, relativ recentele monografii ale lui Lakshmikantham şi Leela[1], Protter şi Weinberger[2] şi Walter[3] le sunt recomandate cu căldură.

În teoria funcţiilor complexe există multe rezultate în care caracterizarea funcţiilor analitice este dată de către anumite inegalităţi diferenţiale. În acest sens menţionez numai binecunoscutul rezultat al lui Noshiro[4]-Warschawski[5]-Wolff[6]: dacă f este o funcţie analitică în discul unitate U, atunci

$$\mathrm{Re} f'(z) > 0,\ z \in \mathrm{U} \Rightarrow f \text{ este univalentă în } \mathrm{U}.$$

Ulterior acestui rezultat referitor la o implicaţie diferenţială de ordinul întâi, astfel de implicaţii apar numai în două articole şi anume cel din 1935 a lui G. Goluzin[7] şi cel din 1947 de R. Robinson[8].

În teoria geometrică a funcţiilor (TGF) aproape toate proprietăţile geometrice ale funcţiilor sunt date de către anumite inegalităţi diferenţiale, care sunt inegalităţi ce leagă funcţia analitică dată şi derivatele sale. Inegalităţile diferenţiale din planul complex reprezintă de fapt inegalităţi relativ la partea reală sau cea imaginară, sau la modulul unei funcţii complexe sau a derivatelor sale (în special cele de ordinul unu sau doi).

Primul articol referitor la *metoda funcţiilor admisibile* a apărut la sfârşitul anilor 1970 şi se referă la inegalităţi diferenţiale de ordinul doi în planul complex (a se vedea[9]), în timp ce al doilea articol a apărut în 1981 (a se vedea[10]).

Numeroase aplicaţii şi extinderi ale teoriei subordonărilor diferenţiale au apărut în ultima perioadă, în diferite domenii, cum ar fi: ecuaţii diferenţiale, ecuaţii cu derivate parţiale, teo-

[1] V. Lakshmikantham, S. Leela, *Differential and Integral Inequalities*, Academic Press, New York, 1969

[2] M. H. Protter, H. F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967

[3] W. Walter, *Differential and Integral Inequalities*, Springer, New York, 1970

[4] K. Noshiro, *On the theory of schlicht functions*, J. Fac. Sci., Hokkaido Imp. Univ. Jap. (1), 2(1934-1935), 129-155

[5] S. E. Warschawski, *On the higher derivatives at the boundary in conformal mapping*, Trans. Amer. Math. Soc., 38(1935), 310-340

[6] J. Wolff, *L´intégrale d´une fonction holomorphe et à partie réelle positive dans un demi plan est univalente*, C. R. Acad. Sci. Paris, 198, 13(1934), 1209-1210

[7] G. M. Goluzin, *On the majorization principle in function theory*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 42(1935), 647-650 (in Russian)

[8] R. M. Robinson, *Univalent majorants*, Trans. Amer. Math. Soc., 61(1947), 1-35

[9] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Second order differential inequalities in the complex plane*, J. Math. Anal. Appl., 65(1978), 298-305

[10] S. S. Miller, P. T. Mocanu, *Differential subordinations and univalent functions*, Michig. Math. J., 28(1981), 157-171

ria funcţiilor meromorfe, teoria funcţiilor armonice, teoria operatorilor integrali, funcţii de mai multe variabile complexe. Ca monografii remarcabile recent apărute în teoria subordonărilor şi a superordonărilor diferenţiale aş menţiona cărţile [1], [2] şi [3].

Această teză de abilitare este o selecţie cuprinzând cele mai importante contribuţii ale autorului din ultimii 13 ani în teoria *subordonărilor şi superordonărilor diferenţiale*, precum şi ale aplicaţiilor acestora în studiul funcţiilor univalente sau a celor multivalente. Mai mult, aplicaţiile din teoria operatorilor integrali analitici şi a operatorilor diferenţiali analitici pe spaţii de funcţii, ocupă un rol important în această teză.

Primul capitol al tezei intitulat *Sandwich-Type Theorems for Analytic Operators* conţine la început rezultatele clasice referitoare la acei operatori $\mathrm{I} : K \to H(\mathrm{U})$, $K \subset H(\mathrm{U})$, care verifică

$$g(z) \prec f(z) \Rightarrow \mathrm{I}(g)(z) \prec \mathrm{I}(f)(z),$$

şi care sunt denumiţi *operatori care conservă subordonările*. Menţionez că aproape toate rezultatele din acest capitol sunt *exacte*, în sensul că în ipotezele date acestea nu mai pot fi îmbunătăţite.

Al doilea articol care a apărut în acest sens (dar primul în ordine cronologică a datei apariţiei) a fost publicat de către autor, iar aceste rezultate combinate cu cele referitoare la *operatori care conservă subordonările* au permis obţinerea aşa-numitor *rezultate de tip sandwich* pentru operatori integrali de forma

$$A_{\beta,\gamma}(f)(z) = \left[\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma}}\int_0^z f^{\beta}(t)t^{\gamma-1}\,\mathrm{d}\,t\right]^{1/\beta}, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{C}.$$

Aceste studii au fost continuate cu cele referitoare la *rezultate de tip sandwich pentru operatori integrali ponderaţi* şi *operatori analitici generali care conservă superordonările*, în care sunt studiate astfel de proprietăţi pentru operatori de forma

$$\mathrm{I}_{h;\beta}[f](z) = \left[\beta\int_0^z f^{\beta}(t)h^{-1}(t)h'(t)\,\mathrm{d}\,t\right]^{1/\beta}$$

şi respectiv

$$\varphi(p(z), zp'(z)) = \alpha(p(z)) + \beta(p(z))\,\gamma(zp'(z)).$$

As dori să subliniez că aceste rezultate care au apărut nu cele mai înalt cotate reviste sunt citate până în prezent de peste 250 de ori.

Sunt studiaţi operatori care conservă superordonările şi rezultate de tip sandwich pentru *operatori diferenţiali de tip Briot-Bouquet generalizaţi*, în următoarele două cazuri, când

$$\psi(p(z), zp'(z)) = \alpha(p(z)) + \beta(p(z))\gamma(zp'(z))$$

sau

$$\psi(p(z), zp'(z)) = \alpha(zp'(z)) + \beta(zp'(z))\gamma(p(z)).$$

Operatorii diferenţiali de tip Briot-Bouquet joacă un rol important în TGF, în special în teoria funcţiilor univalente, deoarece soluţiile analitice ale ecuaţiei diferenţiale Briot-Bouquet sunt strâns legate de operatorii integrali Bernardi-Libera-Livingston. La rândul lor, aceşti ultimi tip de operatori au fost studiaţi exhaustiv de mulţi autori şi au un rol crucial în acest domeniu.

Foarte recent, am obţinut rezultate de tip sandwich pentru o clasă largă de operatori integrali de forma

$$A^{\phi,\varphi}_{\alpha,\beta,\gamma}[f](z) = \left[\frac{\beta+\gamma}{z^{\gamma}\phi(z)}\int_0^z f^{\alpha}(t)\varphi(t)t^{\delta-1}\,\mathrm{d}\,t\right]^{1/\beta}.$$

Cea mai importantă remarcă referitoare la acest ultim rezultat este că instrumentul foarte folositor al *lanţurilor Loewner* care a fost utilizat în multe demonstraţii a fost completat cu faptul că aceste lanţuri trebuie să reprezinte o familie de funcţii. Altfel, demonstraţiile nu sunt complete iar un astfel de contraexemplu l-am prezentat la mai multe conferinţe. Pornind de la acest ultim rezultat (articol) menţionat, toate demonstraţiile viitoare ale unor rezultate similare trebuie să urmeze paşii prezentaţi în demonstraţia rezultatului principal din lucrare. Ţinând seama de importanţa acestui rezultat (în special a demonstraţiei acestuia), demonstraţia integrală din articol este inclusă în teză (a se vedea Secţiunea 1.5).

Într-un mod similar, am îmbunătăţit acest ultim rezultat cu un altul mai bun, întru-un articol în colaborare cu N. E. Cho şi H. R. Srivastava, iar acesta este prezentat în secţiunea care urmează.

într-o lucrare care a apărut în acest an sunt date rezultate de tip sandwich pentru operatori integrali de forma

$$\mathrm{I}^n_{h;\beta,\alpha_i}\left[f_i\right](z)=\left[\frac{\sum_{i=1}^n\alpha_i}{z^{\sum_{i=1}^n\alpha_i-\beta}}\int_0^z\left(\prod_{i=1}^n f_i^{\alpha_i}(t)\right)h^{-1}(t)h'(t)\,dt\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

Aceste rezultate sunt dificil de obţinut deoarece analiticitatea acestor operatori nu poate fi obţinut ua printr-o aplicare directă a binecunoscutei *Integral Existence Theorem* a lui S. S. Miller şi P. T. Mocanu. Totodată, ponderile care apar în acest caz sunt diferite de cele din cazurile anterioare similare.

Acest capitol se încheie cu rezultate de tip sandwich pentru generalizări ale operatorilor integrali Srivastava-Attiya, care sunt legaţi de funcţiile Zeta de tip Hurwitz-Lerch. Doresc să subliniez faptul că deşi ipotezele din rezultatul principal al lucrării sunt simple, relativ slabe, totuşi aceşti operatori conservă subordonările şi superordonările.

Capitolul al doilea intitulat *Applications to the Study of Analytic Functions*, conţine numeroase aplicaţii recente ale teoriei subordonărilor diferenţiale (şi/sau ale superordonărilor) în studiul subclaselor de funcţii univalente şi multivalente.

Astfel, în prima secţiune sunt date proprietăţi de incluziune şi rezultate de tip sandwich pentru subclase de funcţii p-valente definite cu ajutorul unui nou operator liniar Liu-Owa, adică

$$\begin{aligned}&Q^\alpha_{\beta,p}f(z)=\begin{pmatrix}p+\alpha+\beta-1\\ p+\beta-1\end{pmatrix}\frac{\alpha}{z^\beta}\int_0^z\left(1-\frac{t}{z}\right)^{\alpha-1}t^{\beta-1}f(t)\,\mathrm{d}\,t,\ \text{dacă}\ \alpha>0,\ \beta>-1,\\&Q^0_{\beta,p}f(z)=f(z),\ \text{dacă}\ \alpha=0,\ \beta>-1.\end{aligned}$$

Următoarea secţiune conţine studiul unor clase de funcţii meromorfe definite cu ajutorul unei transformări multiplicative de forma

$$\mathrm{I}^m_p(n;\lambda,l)f(z)=(\Phi^{p,m}_{n;\lambda,l}*f)(z),\quad\text{unde}\quad\Phi^{p,m}_{n;\lambda,l}(z)=z^{-p}+\sum_{k=n}^\infty\left[\frac{\lambda(k+p)+l}{l}\right]^m z^k.$$

S-au obţinut rezultate referitoare la incluziunile dintre subclasele considerate, sunt discutate probleme referitoare la razele de incluziune şi este studiată comportarea imaginilor acestor funcţii prin operatorul integral

$$F_{p,c}(f)(z)=\frac{c}{z^{c+p}}\int_0^z t^{c+p-1}f(t)\,\mathrm{d}\,t,\ (c>0).$$

Într-un articol recent am studiat rezultate referitoare la relaţiile de subordonare existente pentru o subclasă de funcţii meromorfe definite cu ajutorul operatorului de convoluţie

$$D^m_{\lambda,p}f(z)=D^1_{\lambda,p}\left(D^{m-1}_{\lambda,p}f(z)\right)=z^p+\sum_{k=n}^\infty\left(\frac{p+\lambda k}{p}\right)^m a_{k+p}z^{k+p},\ m\in\mathbb{N}.$$

Sunt studiate proprietăţi de incluziune, probleme de rază şi imaginile acestor funcţii prin operatorul integral

$$F_{\delta,p}(f)(z) = \frac{\delta+p}{z^{\delta}} \int_0^z t^{\delta-1} f(t)\, \mathrm{d}\, t,\ z \in \mathrm{U} \quad (\delta > -p).$$

În cazul ambele ultimele secţiuni sunt date multe aplicaţii interesante pentru anumite cazuri particulare.

Studiul subclaselor de funcţii multivalente în conexiune cu generalizări ale operatorului Jung-Shams, adică

$$\mathrm{I}_p^{\alpha} f(z) = \frac{(p+1)^{\alpha}}{z\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^z \left(\log \frac{z}{t}\right)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \quad \text{dacă} \quad \alpha > 0,$$

$$\mathrm{I}_p^{0} f(z) = f(z), \quad \text{dacă} \quad \alpha = 0,$$

este dat în următoarea secţiune. S-au obţinut numeroase proprietăţi ale produsului de convoluţie a două funcţii aparţinând acestor clase, mai exact informaţii despre imaginea acestor produse prin operatorul I_p^{α}. Cazurile particulare sunt foarte interesante, unele margini inferioare ale funcţionalelor au fost obţinute cu ajutorul binecunoscutei leme a lui Wilken şi Feng, iar rezultatele nu sunt triviale ci chiar foarte greu de obţinut (după cum au menţionat reeferenţii).

Următoarea secţiune se referă la subclase de funcţii multivalente în conexiune cu operatorul diferenţialo-integral generalizat

$$\begin{aligned}\Omega^{(\lambda,p)} f(z) &= z^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(k+p+1)\,\Gamma(p+1-\lambda)}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(k+p+1-\lambda)}\, a_{k+p}\, z^{k+p} \\ &= z^p\ {}_2F_1(1, p+1, p+1-\lambda; z) * f(z),\ z \in \mathrm{U}.\end{aligned}$$

Sunt discutate relaţiile de incluziune, problemele de rază şi proprietăţiile imaginilor acestor funcţii prin operatorul diferenţialo-integral

$$\begin{aligned}\mathrm{F}_{\mu,p}(f)(z) = \frac{\mu+p}{z^{\mu}} \int_0^z t^{\mu-1} f(t)\, \mathrm{d}\, t &= \left(z^p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu+p}{\mu+p+k} z^{p+k}\right) * f(z) \\ &= z^p\ {}_2F_1(1, \mu+p, \mu+p+1; z) * f(z),\ z \in \mathrm{U}.\end{aligned}$$

De asemenea, sunt date multe cazuri particulare ale rezultatului general.

În ultima secţiune din acest capitol, pornind de la un rezultat cu privire la subordonarea diferenţială Briot-Bouquet, am obţinut foarte recent două teoreme referitoare la o clasă de operatori generali care verifică o anumită ecuaţie fdiferenţială. Aceste rezultate generalizează multe rezultate anterioare obţinute de numerişi autori iar pe alte câteva le corectează.

Aşa cum am manţionat atunci când am descris acest capitol, subliniez că aproape toate rezultatele incluse în acest capitol sunt *exacte*, în sensul că în ipotezele date acestea nu mai pot fi îmbunătăţite.

Capitolul al treilea intitulat *New Results in the Geometric Theory of Analytical Functions*, conţine câteva din rezultatele referitoare la teoria clasică a funcţiilor univalente.

Astfel, în prima secţiune am dat câteva condiţii suficiente şi simple de stelaritate de un anumit ordin, care generalizează şi totodată sunt legate de unele din lucrările anterioare ale lui Li şi Owa şi respectiv Lewandowski, Miller şi Zlotkiewicz. Mai mult, folosind un rezultat a lui M. Robertson, am extins unele din rezultatele binecunoscute ale lui Owa, Obradović şi Lee. Remarcăm faptul că toate aceste rezultate sunt foarte simple de folosit în anumite probleme calculatorii şi ipotezele pot fi foarte uşor verificate.

În secţiunea următoare, folosind metoda subordonărilor diferenţiale, sunt investigate relaţiile de incluziune dintre douăsubclase de funcţii p-valente definite cu ajutorul operatorului Liu–Owa, adică operatorul $Q^{\alpha}_{\beta,p}$ care a fost anterior menţionat. Sunt studiate proprietăti ale imaginilor acestor două tipuri de funcţii printr-un operator integral, probleme de rază, iar toate marginile şi dominantele obţinute sunt cele mai bune posibile; rezultatele le îmbunătăţesc pe cele obţinute de Liu.

În continuare, folosind metoda subordonărilor diferenţiale, s-au abţinut anumite relaţii de incluziune dintre funcţii alfa-convexe de un anumit ordin şi o clasă de funcţii de tip Bazilević. Sunt studiate conexiunile dintre două subclase de funcţii analitice: prima, generalizează funcţiile alfa-convexe, în timp ce a doua reprezintă o subclasă a funcţiilor de tip Bazilević. Am prezentat numeroase cazuri particulare care pot fi folosite foarte uşor deoarece ipotezele sunt foarte simplu de verificat.

Secţiunea următoare conţine rezultate interesante despre subclase de funcţii multivalente spiralate. Astfel, s-au studiat proprietăţi de convoluţie ale funcţiilor spiralat-stelate şi spiralat-convexe iar anumite cazuri particulare sunt scoase în evidenţă. Apoi s-au obţinut relaţii de incluziune şi proprietăţi de convoluţie pentru anumite noi subclase de funcţii p–valente definite cu ajutorul operatorului Dziok–Srivastava. Menţionez că aceste tipuri de rezultate pe care l-am obţinut aici, care se referă la faptul că anumite serii de puteri (adică funcţii analitice) nu au zerouri în discul unitate pentru anumite valori ale parametrilor, au fost neglijate până acum şi nu sunt cunoscute prea multe studii în această direţie.

În ultima secţiune, care conţine cele mai noi rezultate obţinute, am obţinut condiţii generalizate care să asigure stelaritatea şi convexitatea anumitor funcţii analitice normalizate, rezultate care le extind pe cele recent obţinute de Uyanik şi Owa, iar mai mult, chiar şi le corectează. Deoarece demonstraţiile articolelor menţionate mai înainte par să fie neclare, noi am încercat să îmbunătăţim şi să extindem anumite condiţii simple de stelaritate şi de convexitate pentru funcţii cu coeficienţi iniţiali care lipsesc. Folosind inegalităţi integrale simple, am încercat să generalizăm unele rezultate anterioare care par a nu fi corecte (în principal, să le corectăm) şi am dat apoi câteva cazuri particulare interesante ale rezultatelor noastre. Metodele folosite aici sunt utilizate frecvent în analiza complexă şi în teoria operatorilor pe spaţii de funcţii analitice: printre altele, de exemplu, în obţinerea estimărilor pentru studiul local al operatorilor pe spaţii de funcţii analitice pentru funcţiile de una sau mai multe variabile, care conţin expresii ale unor derivate în definiţiile spaţiilor (a se vedea, de exemplu, unele lucrări ale lui S. Stević). Deoarece demonstraţia pare a fi una deosebită, am inclus-o în teză.

Capitolul al patrulea are titlul *Miscellaneous Contributions in the Theory of Univalent Function.* Prima secţiune este o îcercare de a extinde unele rezultate referitoare la *operatori integrali de mediere* pentru operatorii

$$\mathrm{I}_{h;\beta,\gamma}[f](z) = \left[\frac{\gamma}{h^{\gamma}(z)}\int_0^z f^{\beta}(t)h^{\gamma-1}(t)h'(t)\mathrm{d}t\right]^{1/\beta}.$$

Noutatea constă şi în faptul că, în demonstraţia rezultatului principal, unde unul dintre punctele de contact al frontierei a fost fixat iar lanţul Loewner a fost definit cu ajutorul acestui punct.

Al doilea rezultat este legat de noţiunea de *cvasi-subordonare*, şi/sau *majorizare*. Acest concept este mai slab decât acel de subordonare, însă în anumite cazuri se pot găsi rezultate edificatoare în acest domeniu. Astfel, pentru a clasă de funcţii definite cu ajutorul transformării multiplicative

$$\mathcal{I}_p(n,\lambda)f(z) = z^p + \sum_{k=p+1}^{\infty}\left(\frac{k+\lambda}{p+\lambda}\right)^n a_k z^k, \quad (\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{-p\},\ n \in \mathbb{Z}),$$

am dat un rezultat de majorizare între doi operatori care aparţin acestor clase de mai sus. Rezultatele pot fi foarte uşor de aplicate pentru multe cazuri speciale, iar în particular am obţinut şi unele rezultate anterioare binecunoscute.

Capitolul şi teza se încheie cu ultimul meu rezultat care reprezintă studiul mai multor proprietăţi ale *funcţiilor bi-univalente*. Aceste funcţii au fost definite îtr-o lucrare apărută în Studia Universitatis Babeş-Bolyai – Mathematica în 1986 iar mai multe articole referitor la aceste clase au apărut recent. Am arătat că aceste clase sunt invariante în raport cu anumite transformări de bază, am găsit teoreme de acoperire, de deformare şi de rotaţie. Mai mult, avem o teoremă de 'creştere' şi una de 'creştere' şi rotaţie. Am concluzionat că În cazul în care conjectura lui Brannan şi Clunie ar putea fi demonstrată, rezultatele noastre ar da estimări mai bune. Până acum, nu ştiu ca acest tip de investigaţii să fi fost făcut pentru aceste clase.

Monografii de referinţă

[1] S. S. Miller and P. T. Mocanu, *Differential Subordinations. Theory and Applications*, Marcel Dekker, New York, 1999

[2] P. T. Mocanu, T. Bulboacă, Gr. Şt. Sălăgean, *Teoria geometrică a funcţiilor univalente*, Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 1999, 410+vii pag.

- Ediţia a doua (reviziută şi completată), Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2006, 460+ix pag.

[3] T. Bulboacă, *Differential Subordinations and Superordinations. New Results*, House of Scientific Boook Publ., Cluj-Napoca, 2005, 297+vi pag., ISBN 973-686-777-3.